Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Unterräume und direkte Summe**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (2)
Begründen Sie, welche der folgenden Aussagen richtig ist:

a) Ist U ein Unterraum des Vektorraumes V, dann ist $V \setminus U$ ebenfalls ein Unterraum von V.

b) Es gibt einen Unterraum U von V, für den $V \setminus U$ auch ein Unterraum von V ist. Dies gilt aber nicht für jeden Unterraum U.

c) U ist ein Unterraum von V impliziert, dass $V \setminus U$ auch ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 2 (1)
Begründen Sie, wie viele Unterräume der $\mathbb{R}^2$ hat:

a) zwei: $\{(0,0)\}$ und $\mathbb{R}^2$

b) vier: $\{(0,0)\}$, $\{0\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \{0\}$ und $\mathbb{R}^2$

c) unendlich viele

Aufgabe 3 (3)
Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$ mit den eintragsweisen Operationen. Beweisen Sie, dass die folgenden Teilmengen Unterräume des $\mathbb{R}^3$ sind.

a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$

b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$

c) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$

d) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3x, z = 5x\}$

e) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

f) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 4x, z = -2y\}$

Aufgabe 4 (3)
Überlegen Sie, wie man zeigen kann, dass eine gegebene Teilmenge U eines Vektorraumes V kein Unterraum von V ist. Versuchen Sie nun zu zeigen, dass folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ keine Unterräume sind:

a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$

b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq y\}$

c) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 1\}$

d) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x + y| \leq z\}$

e) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2\}$

f) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$

Aufgabe 5 (3)
Sei $V = \mathrm{Abb}([a,b], \mathbb{R})$. Entscheiden Sie, ob folgende Teilmengen von V Unterräume sind:

a) $U = \{f \in V : f(x) \leq 10 \text{ für alle } x \in [a,b]\}$

b) $U = \{f \in V : f \text{ ist konstant auf } [a,b]\}$

c) $U = \{f \in V : f(x) > 5 \text{ für alle } x \in [a,b]\}$

d) $U = \{f \in V : f(x) \neq 0 \text{ für ein } x \in [a,b]\}$

e) $U = \{f \in V : f(a) = f(b) = 0\}$

f) $U = \{f \in V : f \text{ ist stetig auf } [a, b]\}$

Aufgabe 6 (3)
Sei Abb $(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ der Raum aller rationalen Zahlenfolgen. Wir wissen bereits, dass Abb $(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ bezüglich der punktweisen Operationen ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist. Welche der folgenden Teilmengen $U \subseteq \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ bildet einen Unterraum von Abb $(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$. Beweis oder Gegenbeispiel:

a) $U = \{f \in \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) : f(n) = f(n+2) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$

b) $U = \{f \in \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) : f(n) \neq f(n+2) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$

c) $U = \{f \in \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) : f(n) \leq f(n+1) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$

d) $U = \{f \in \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) : f(n) = 0 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$

e) $U = \{f \in \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) : f(n) = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 7 (4)
Für $\alpha \in \mathbb{K}$ definieren wir $U_\alpha := \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : x + y + z = \alpha\}$, wobei $\mathbb{K}$ ein Körper ist. Beweisen Sie die folgende Aussage: U_α ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^3$ genau dann, wenn $\alpha = 0$ gilt.

Aufgabe 8 (2)
Seien $U_1 := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ und $U_2 := \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ Unterräume des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ kein Unterraum ist.

Aufgabe 9 (3)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sind U_1 und U_2 Unterräume von V, so ist $U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V.

b) Ist U_i ein Unterraum von V für alle $i \in I$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist, so ist auch $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ ein Unterraum von V.

Aufgabe 10 (2)
Sei $V := \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie für die folgenden Unterräume U und W von V jeweils die Summe $U + W$. Begründen Sie, in welchen Fällen die Summe direkt ist.

a) $U = \{(s, 2s, 0, 0) : s \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(0, 0, s, 2s) : s \in \mathbb{R}\}$

b) $U = \{(s, t, 3s, 0) : s, t \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(s, 0, 3s, 0) : s \in \mathbb{R}\}$

c) $U = \{(s, t, 0, 0) : s, t \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(0, s, t, u) : s, t, u \in \mathbb{R}\}$

d) $U = \{(s, 2s, t, 0) : s, t \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(0, s, 0, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 11 (2)
Sei $V := \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Zahlenfolgen. Wir definieren $U_1 := \{f \in V : f(n) = 0, \text{ für gerade } n\}$ und $U_2 := \{f \in V : f(n) = 0, \text{ für ungerade } n\}$. Berechnen Sie die Summe $U_1 + U_2$. Handelt es sich um eine direkte Summe?

Aufgabe 12 (2)
Sei $V := \mathbb{R}^3$. Finden Sie zu den folgenden Unterräumen U jeweils einen Komplementärraum W, also einen Unterraum von V, so dass gilt: $V = U \oplus W$.

a) $U = \{(x, 2x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

b) $U = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$

c) $U = \{(x, y, 2y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

d) $U = \{(0, 0, 0)\}$

e) $U = \{(x, y, 4y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

f) $U = \{(0, x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 13 (3)
Sei V ein beliebiger $\mathbb{K}$-Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei weiterhin U ein Unterraum von V. Wieso ist dann U auch ein $\mathbb{K}$-Vektorraum? Zeigen Sie, dass in U alle Rechengesetze gelten, welche auch in V gelten.